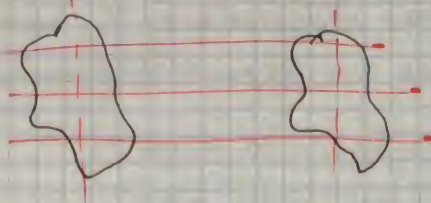


P3

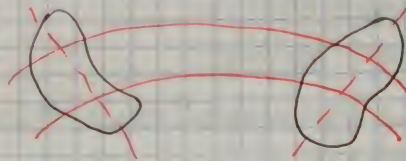
16 12 74

Cinemática en el plano de un Cuerpo Rígido

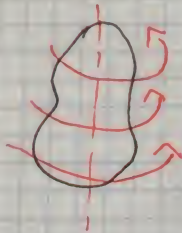
Movimiento de un cuerpo rígido



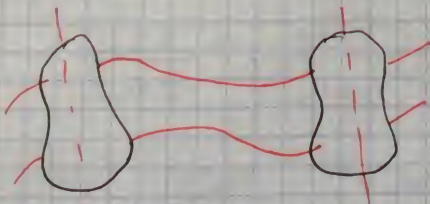
Traslación
Rectilínea



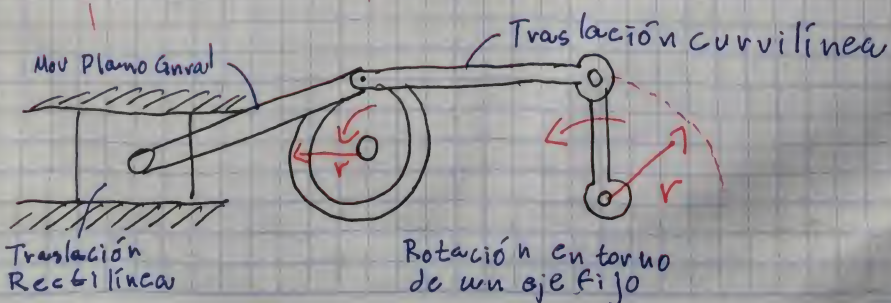
Traslación
Curvilínea



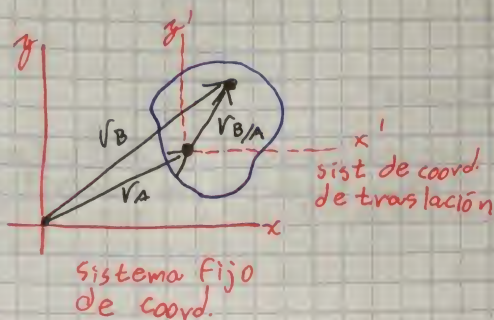
Rotación en torno
de un eje fijo



Movimiento en un
Plano general



Traslación



Posición:

$$r_B = r_A + r_{B/A}$$

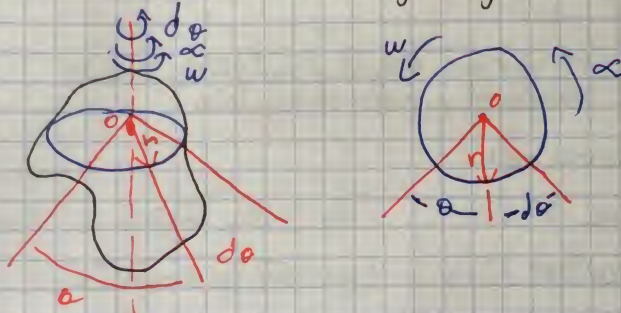
velocidad:

$$v_A = v_B$$

Accel

$$a_B = a_A$$

Rotación tornode un eje fijo



El cambio en la posición angular se mide el diferencial $d\theta$, se conoce como desplazamiento angular y se mide en grados, radianes o revoluciones

Velocidad angular

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Acceleración angular

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\alpha d\theta = \omega d\omega$$

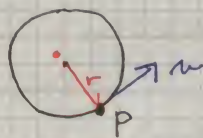
Accel angular cte.

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha (\theta - \theta_0)$$

Movimiento del punto P



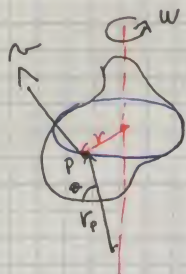
Posición:

La posición de P se define por el vector unitario posición "r", que se extiende de "O" a "P"

Velocidad

$$v = \omega r$$

$$v = \bar{\omega} \times r_P$$



r_P = se dirige desde cualquier punto sobre el eje de rotación

Aceleración

$$a_t = \alpha r$$

$$a = a_t + a_n$$

$$a_n = \omega^2 r$$

$$a = \bar{\alpha} \times r - \omega^2 r$$

Análisis del movimiento relativo: velocidad

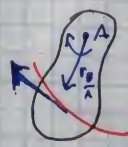
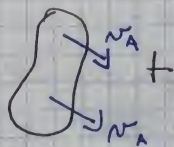
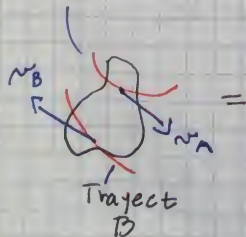
Posición

$$r_B = r_A + r_{B/A}$$

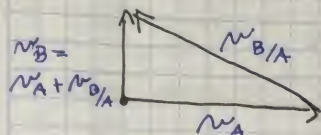
Velocidad

$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

Traectoria de A



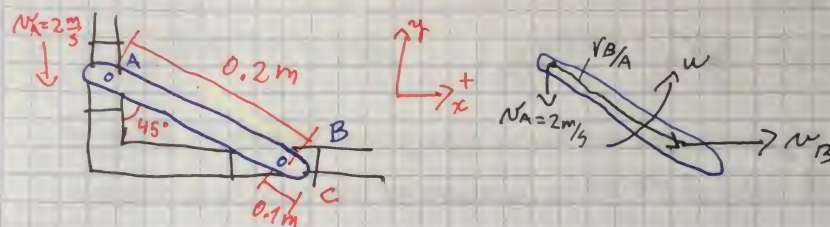
$$v_{B/A} = \omega r_{B/A}$$



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$$

v_B = vel B ω = velocidad angular del cuerpo
 v_A = vel A $r_{B/A}$ = vector pos relativo de A a B

Ej) Dos bloques A y B que se mueven en las ranuras fijas guían la barra que aparece en la figura. Si la vel de A es de 2 m/s hacia abajo, determine la vel de B en $\theta = 45^\circ$.



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$$

comp i, j, k

$$\vec{v}_{B/A} = -2\vec{j} + [\omega\vec{k} \times (0.2\sin 45^\circ\vec{i} - 0.2\cos 45^\circ\vec{j})]$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad C = (A_y B_z - A_z B_y)\vec{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{k}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0.2\sin 45^\circ & -0.2\cos 45^\circ & 0 \end{vmatrix} = (0 - (-0.2\cos 45^\circ)(\omega))\vec{i} + (0 - (0.2\sin 45^\circ)(\omega))\vec{j} + (0 - 0)\vec{k}$$

$$= \omega 0.2 \cos 45^\circ \vec{i} + \omega \sin 45^\circ \vec{j}$$

$$\vec{v}_{B_i} = -2\vec{j} + 0.2\omega \sin 45^\circ \vec{j} + 0.2\omega \cos 45^\circ \vec{i}$$

igualar componentes i y j

$$v_B = 0.2\omega \cos 45^\circ, \quad 0 = -2 + 0.2\omega \sin 45^\circ$$

$$\omega = 14.1 \text{ rad/seg} \quad v_B = 2 \text{ m/s} \rightarrow$$

Centro instantáneo, velocidad cero

Es posible de determinar la velocidad de cualquier punto B localizado en un cuerpo rígido si se elige el punto de base A tenga una velocidad cero en el instante que se considera. En este caso $v_A = 0$

Por lo tanto

$$v_B = v_A + \omega \times r_{B/A}$$

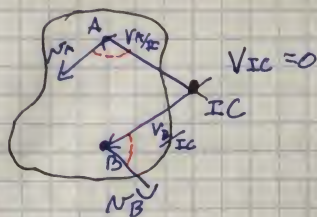
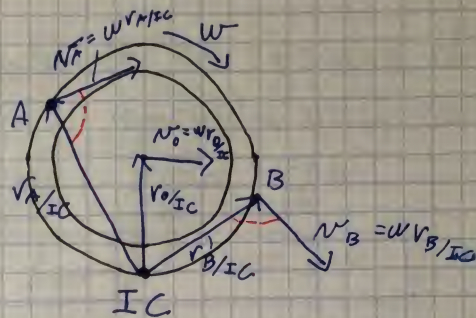
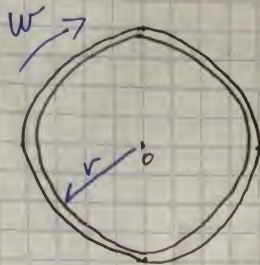
$$v_B = \omega \times r_{B/A}$$

Para un cuerpo con un movimiento general en el plano, el punto A elegido de esta manera se conoce como centro instantáneo de velocidad cero.

Este eje siempre es perpendicular al plano utilizado para representar el movimiento y su intersección con dicho plano nos da la ubicación de I_c como el punto A coincide con $I_c \Rightarrow v_B = \omega \times r_{B/I_c}$

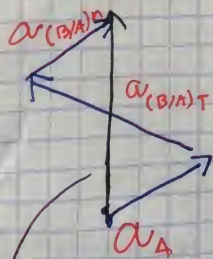
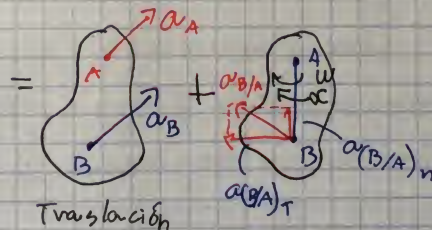
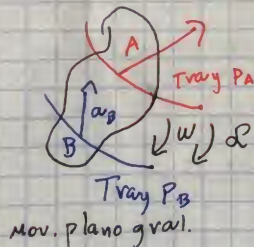
y por lo tanto el punto B se desplaza momentáneamente en torno I_c describiendo una trayectoria circular, el cuerpo parece girar en torno al eje instantáneo.

Si el vector de posición relativa r_{B/I_c} se establece desde I_c al punto B; entonces la magnitud de v_B es simplemente $v_B = \omega r_{B/I_c}$



Tarea
Si la barra

Análisis del movimiento Relativo: Aceleración



$$a_B = a_A + a_{B/A}_T + a_{B/A}_n$$

Es posible determinar una ecuación que relacione las aceleraciones de dos puntos de un cuerpo rígido que experimenta un movimiento en el plano en general, al diferenciar

la ecuación de velocidad $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$ con respecto al tiempo

$$\frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{B/A}}{dt}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$$

\mathbf{a}_B = accel Punto B

\mathbf{a}_A = accel Punto A

$(\mathbf{a}_{B/A})_t$ = accel tangencial relativa del componente de "B con respecto A". Como el movimiento relativo es circular la magnitud de $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ es

$$(\mathbf{a}_{B/A})_t = \omega \mathbf{v}_{B/A} \text{ y la dirección es perpendicular.}$$

$(\mathbf{a}_{B/A})_n$ = Componente de accel normal relativa respecto de "A". Como el movimiento relativo es circular, la magnitud de $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ es $(\mathbf{a}_{B/A})_n = \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$ y la dirección es siempre B hacia A

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \bar{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

\mathbf{a}_B = accel Punto B

\mathbf{a}_A = accel punto A

$\bar{\omega}$ = accel angular del cuerpo

ω = velocidad angular del cuerpo

$\mathbf{r}_{B/A}$ = vector posición relativa que se toma de A hacia B.

Continuación Cuaderno

ej) El collarín C de la Fig se mueve hacia abajo con una accel 1 m/s^2 . En el instante que se ilustra tiene una rapidez de 2 m/s que proporciona a las barras CB y AB una velocidad angular $\omega_{AB} = 10 \text{ rad/s}$. Determine las accel angulares de CB y AB en ese instante.

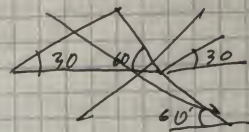
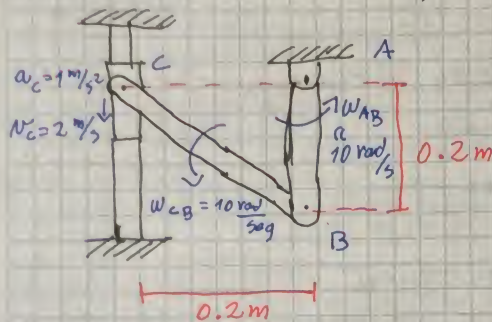
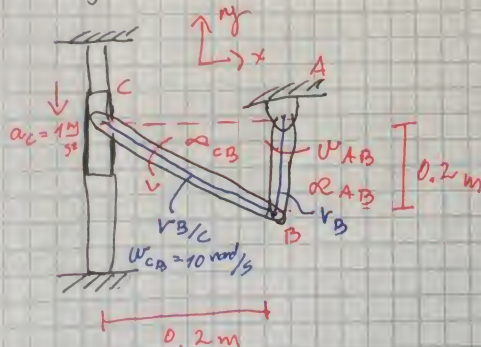


Diagrama cinético



Ecuación de la aceleración Barra AB (rot a un eje fijo)

$$\begin{aligned} \alpha_B &= \alpha_{AB} \times r_B - \omega_{AB}^2 r_B \\ &= (\alpha_{AB} K) \times (-0.2j) - (10^2)(-0.2j) \\ \alpha_B &= 0.2\alpha_{AB}i + 20j \end{aligned}$$

Barra BC (mov plano general)

$$a_B = a_C + \omega_{CB} \times r_{B/C} - \omega_{CB}^2 r_{B/C}$$

$$0.2 \alpha_{AB} + 20j = -1j + (\alpha_{CB} k) \times (0.2i - 0.2j) - (10^2) (0.2i - 0.2j)$$

$$0.2 \alpha_{AB} i + 20j = -1j + 0.2 \alpha_{CB} j + 0.2 \alpha_{CB} i - 20i + 20j$$

Asi

$$0.2 \alpha_{AB} = 0.2 \alpha_{CB} - 20$$

$$20 = -1 + 0.2 \alpha_{CB} + 20$$

$$\alpha_{CB} = 5 \text{ rad/s}^2 \quad \uparrow$$

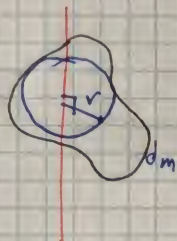
$$\alpha_{AB} = -95 \text{ rad/s}^2 \Rightarrow 95 \text{ rad/s}^2 \quad \downarrow$$

18/12/14

Cinética en el Plano de un Cuerpo Rígido

Fuerza y aceleración:

Momento de inercia



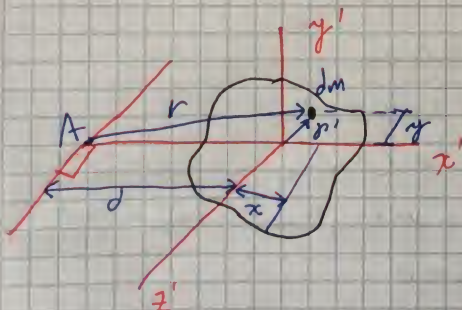
$$I = \int_m r^2 dm$$

El momento de inercia se define como la integral del "segundo momento" en torno de un eje de todos los elementos de masa dm que componen el cuerpo.

Teorema de ejes Paralelos:

$$I = I_G + m d^2$$

I_G = momento de inercia en torno del eje Z' que atraviesa el centro de masa G .
 m = masa del cuerpo
 d = dist perpendicular entre los ejes paralelos



Radio de Giro:

El momento de inercia de un cuerpo en torno de un eje específico se señala por medio del radio de giro, " K ". Este valor tiene unidades de longitud y cuando éste y la masa del cuerpo " m " son datos conocidos

$$I = m K^2$$

$$K = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

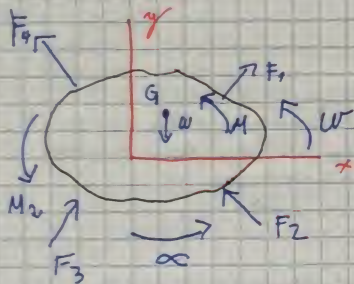
Ecuaciones de Movimiento Cinético en el Plano

Ecuación del movimiento traslacional

$$\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a}_G$$

$$\sum F_x = m(a_G)_x$$

$$\sum F_y = m(a_G)_y$$



Eq. del mcv de rotación

$$\sum M_G = I_G \alpha$$

Esta ecuación de rotación del movimiento establece que la suma de los momentos de todas las fuerzas externas, calculada en torno del C.M., G , del cuerpo, es igual al producto del momento de inercia del cuerpo en torno de un eje que atraviesa G y la aceleración angular del mismo.

Ecuaciones de movimiento: Traslación

Transl. rectilínea

$$\sum F_x = m(a_G)_x$$

$$\sum F_y = m(a_G)_y$$

$$\sum M_G = 0$$

Transl. Curvilínea

$$\sum F_n = m(a_G)_n$$

$$\sum F_t = m(a_G)_t$$

$$\sum M_G = 0$$

$(a_G)_n$ = accel normal

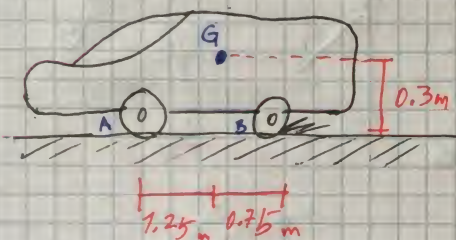
$(a_G)_t$ = accel tangencial

Si el cuerpo se encuentra en contacto con una superficie ab para g ocurre deslizamiento:

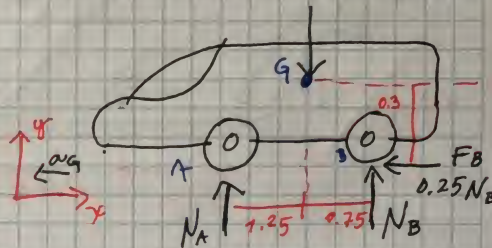
$$F = \mu_k N$$

F siempre actúa sobre el cuerpo en sentido opuesto al movimiento de éste con relación a la superficie con la que está en contacto.

Ej) El carro de la Fig. $m = 2000 \text{ kg}$ y cm en G . Determine la a_G del auto si las ruedas de tracción en la parte trasera derrapan continuamente, en tanto que las delanteras giran libremente, desprecie masa de las ruedas. El coeficiente de fricción cinética de las ruedas y el camino es $\mu_k = 0.25$



Análisis $2000(9.81) \text{ N}$



$$\rightarrow \sum F_x = m(a_G)_x$$

$$-0.25 N_B = -(2000 \text{ kg})(a_G)$$

$$\uparrow \sum F_y = m(a_G)_y$$

$$N_A + N_B - 200(9.81) \text{ N} = 0$$

$$\circlearrowleft \sum M_G = 0$$

$$-N_A(1.25) - (0.25 N_B)(0.3) + N_B(0.75) = 0$$

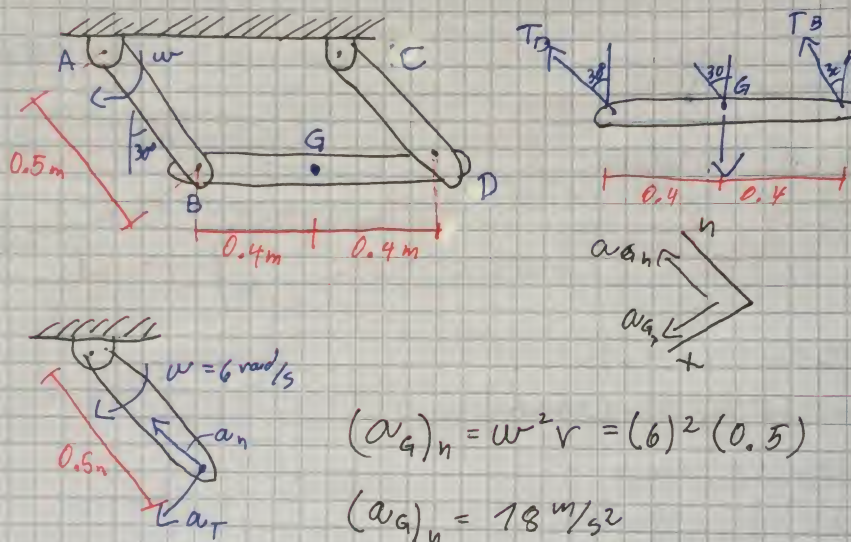
Resolviendo

$$a_G = 1.59 \text{ m/s}^2 \leftarrow$$

$$N_A = 6.88 \text{ kN}$$

$$N_B = 127 \text{ kN}$$

g) La viga BD de 100 Kg de la Fig. está soportada por dos barras cu ya masa es despreciable. Determine la Fuerza Geneva da sobre cada barra en el instante $\theta = 30^\circ$, ambas barras giran con $\omega = 6 \text{ rad/s}$



$$(a_G)_n = \omega^2 r = (6)^2 (0.5)$$

$$(a_G)_n = 18 \text{ m/s}^2$$

Eg Mov

$$\uparrow \sum F_n = m(a_G)_n \Rightarrow T_B + T_D - 981 \cos 30^\circ = 100 \text{ Kg} (18 \text{ m/s}^2)$$

$$\uparrow \sum F_t = m(a_G)_t \Rightarrow 981 \sin 30^\circ = 100 \text{ Kg} (a_G)_t$$

$$\curvearrowright \sum M_G = 0 \Rightarrow -(T_B \cos 30^\circ)(0.4 \text{ m}) + (T_D \cos 30^\circ)(0.4) = 0$$

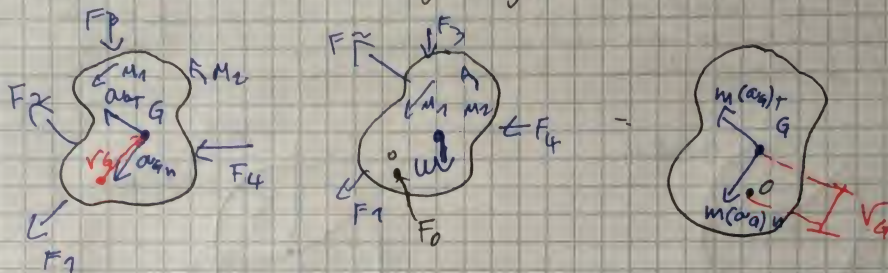
Resolviendo

$$T_B = T_D = 1.33 \text{ KN} \nearrow 30^\circ$$

$$(a_G)_t = 4.90 \text{ m/s}^2$$

Ecuaaciones de Movimiento

Rotación entorno a un eje fijo



$$\sum F_n = m (a_G)_n = m \omega^2 r_G$$

$$\sum F_t = m (a_G)_t = m \alpha r_G$$

$$\sum M_G = I_G \alpha$$

$$\sum M_O = r_G m (a_G)_t + I_G \alpha$$

$$\sum F_n = m (a_G)_n = m \omega^2 r_G$$

$$\sum F_t = m (a_G)_t = m \alpha r_G$$

$$\sum M_O = I_O \alpha$$

Si accel angular es variable

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

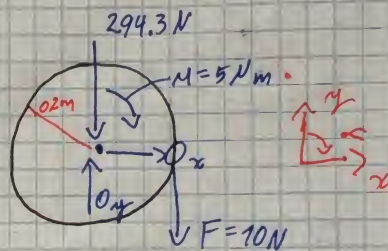
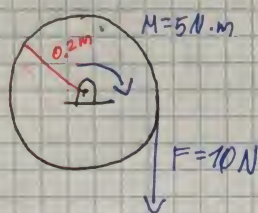
Si accel angular es cto

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

ej) El disco de 30 kg es sujetado por un perno en su centro. Si avanza desde el reposo, determine el número de revs que debe planear antes de lograr una vel angular de 20 rad/s. ¿Cuáles son las reacciones en el perno? 40 rev el disco actúa una fuerza cte $F=10$ aplicada en una cuerda que se enrolla en superficie con $u_m M etc = 5 N \cdot m$, desprecie masa cuerda



Momento de inercia del disco en torno del perno es

$$I_o = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} (30 \text{ kg}) (0.2 \text{ m})^2 = 0.6 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Eg del mov.

$$\rightarrow \sum F_x = m (a_G)_x = 0 \Rightarrow 0_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = m (a_G)_y; \quad 0_y - 294.3 \text{ N} - 10 \text{ N} = 0$$

$$0_y = 304.3 \text{ N}$$

$$\sum M_o = I_o \alpha$$

$$-10 \text{ N} (0.2 \text{ m}) - 5 \text{ N} \cdot \text{m} = (-6) \Rightarrow \alpha = 11.7 \text{ rad/s}^2$$

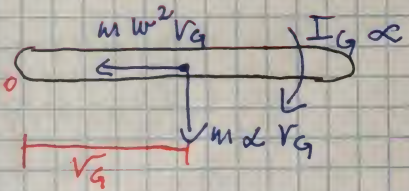
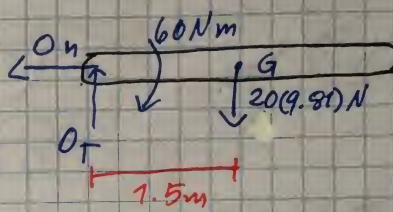
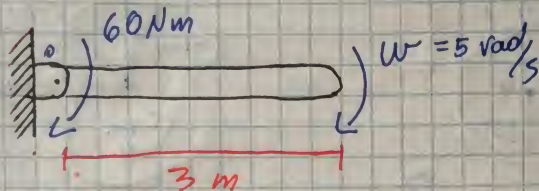
$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2 \alpha (\theta - \theta_o)$$

$$(-20 \text{ rad/s})^2 = 0 + 2 (-11.7 \text{ rad/s}^2) (\theta - 0)$$

$$\theta = -17.1 \text{ rad} = 17.1 \text{ rad} \downarrow$$

$$\theta = 2.73 \text{ rev} \downarrow$$

- 8j) La varilla de 20 kg, gira en el plano vertical, y en el instante mostrado tiene una velocidad angular de $\omega = 5 \text{ rad/s}$. Determine la aceleración angular de la varilla y las componentes horiz. y vert. de la reacción del perno



Eq del mov

$$\leftarrow + \sum F_n = m\omega^2 r_G = O_h = (20 \text{ Kg})(5 \text{ rad/s})^2 (1.5 \text{ m})$$

$$O_h = 750 \text{ N}$$

$$\downarrow + \sum F_t = m\alpha r_G$$

$$-O_v + 20(9.81) \text{ N} = (20 \text{ Kg})(\alpha)(1.5 \text{ m})$$

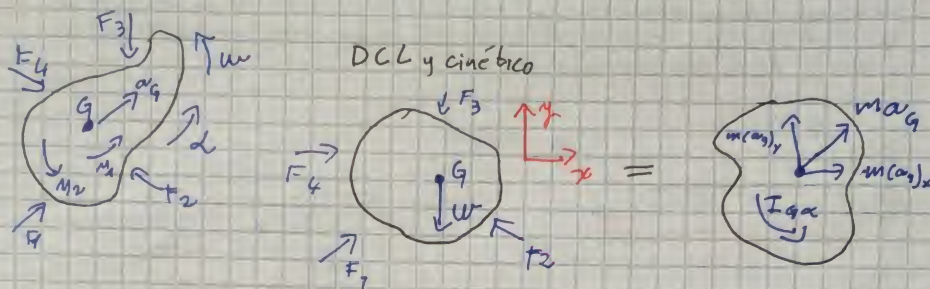
$$O_v = 19.0 \text{ N}$$

$$\curvearrowright + \sum M_G = I_G \alpha$$

$$(19.0 \text{ N})(1.5) + 60 \text{ N}\cdot\text{m} = \left[\frac{1}{12} (20 \text{ Kg})(3 \text{ m})^2 \right] \alpha$$

$$\alpha = 5.90 \text{ rad/s}^2$$

Movimiento en plano General



$$\sum F_x = m(\alpha_G)_x$$

$$\sum F_y = m(\alpha_G)_y$$

$$\sum M_G = I_G \alpha$$

En algunos problemas es conveniente sumar los momentos en torno de algún punto P que no sea G . Por lo general esto se hace para eliminar fuerzas desconocidas de la sumatoria de los momentos. Quedan estas E_1 .

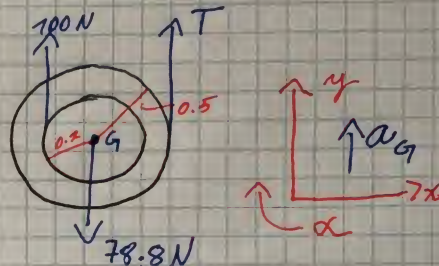
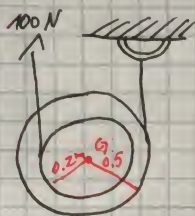
$$\sum F_x = m(\alpha_G)_x$$

$$\sum F_y = m(\alpha_G)_y$$

$$\sum M_P = \sum (M_P)_P$$

$\sum (M_P)_P$ representa la suma de momentos d.c. $I_G \alpha$ y $m a_G$ (sus componentes) en torno al punto P según se determina por los datos del diagrama cinético.

Ej) El carrete tiene una masa de 8 Kg, y un radio de giro de $K_G = 0.35 \text{ m}$. Si se envuelve cuerdas (de masa despreciable) en torno del borde interior y exterior, determine la aceleración angular del carrete.



Momento de inercia del carrete:

$$I_G = m K_G^2 = 8(0.35)^2 = 0.980 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Eq. de Mov.

$$\uparrow \sum F_y = m (a_G)_y$$

$$T + 100 \text{ N} - 78.48 \text{ N} = (8 \text{ Kg})(a_G)$$

$$\curvearrowright \sum M_G = I_G \alpha$$

$$100 \text{ N} (0.2 \text{ m}) - T (0.5 \text{ m}) = (0.980 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2) \alpha$$

Se obtiene una relación entre a_G con α , por cinemática

En tal caso el carrete gira sin deslizarse, sobre una cuerda en A, se utiliza Eq:

$$(\curvearrowright) a_G = \alpha r$$

$$a_G = 0.5 \alpha$$

Despejando Eq.

$$\alpha = 10.3 \text{ rad/s}^2$$

$$a_G = 5.16 \text{ m/s}^2$$

$$T = 19.8 \text{ N}$$